



جمهوری اسلامی ایران
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره آموزش و پرورش منطقه هفت تهران

ساعت امتحان: ۱۱ صبح
وقت امتحان: ۱۱۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۱۰/۱۴
تعداد برگ سؤال: ۱ برگ

ش صندلی (ش داوطلب): نام واحد آموزشی: دبیرستان هاتف نوبت امتحانی: دی ماه
نام خانوادگی: نام پدر: پایه: سوم رشته: رشته‌های: ریاضی
سؤال امتحان درس: جبر و احتمال نام دبیر/دبیران: آقای ارشدی سال تحصیلی: ۹۵-۹۶

۲	<p>۱- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:</p> <p>الف) حاصل عبارت $۲۰^۲ + ۱۱^۲ + \dots + ۱۰^۲$ برابر است.</p> <p>ب) نامساوی $n! > ۳^n$ در مجموعه اعداد طبیعی دارای مثال نقض است.</p> <p>ج) حداقل نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ واحد انتخاب کنیم مطمئن هستیم دست کم ۲ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از $\frac{۲}{۳}$ کمتر است.</p> <p>د) مجموعه $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای زیر مجموعه شامل عضو a است.</p> <p>ه) عدد اصلی مجموعه $(p(p(p(\emptyset)))$ برابر است.</p> <p>و) اگر $A_n = (-\frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1})$ حاصل $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ برابر است.</p> <p>ز) اگر $A = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $A \cap B = \{۲, ۳\}$ و مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۶ عضو باشد تعداد اعضای مجموعه B برابر است.</p>
۱/۵	<p>۲- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:</p> $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$
۱	<p>۳- اگر a عددی فرد باشد، بزرگترین مقدار k که بازای آن عدد $(۳a^۲ + ۵)(۳a^۲ + ۳)$ بر ۲^k بخشپذیر باشد را بدست آورید.</p>
۱	<p>۴- با استفاده استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر a مضرب ۳ نباشد مربع آن به صورت $۳k + ۱$ خواهد بود.</p>
۱	<p>۵- ثابت کنید:</p> $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$
۱	<p>۶- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:</p> $A \times C = B \times C, \quad c \neq \emptyset \Rightarrow A = B$
۱	<p>۷- نشان دهید هر زیر مجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه $A = \{۱, ۲, \dots, ۱۸\}$ دارای حداقل یک زوج عضو با مجموع ۱۹ می باشد.</p>
۱/۵	<p>۸- ثابت کنید هر عدد اول p، $(p \geq ۵)$ به صورت $۶k \pm ۱$ است. (برهان خلف)</p>
۱	<p>۹- مجموعه $A = \{۳ - \frac{\sqrt{۲۲}}{۴}, ۳ + \frac{\sqrt{۲۲}}{۴}\}$ را با گزاره نما مشخص کنید.</p>

۳	<p>۱۰- اگر $M = \{x x = 2^k, 1 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{N}\}$ مجموع مرجع باشد و مجموعه $A = \{2^x x = 2^k, k \in M\}$ و $B = \{x x = 2^k, k \in \mathbb{Z}\}$ باشند:</p> <p>الف) مجموعه های A و B را مشخص کنید.</p> <p>ب) $p(p(p(A)))$ چند زیر مجموعه دارد.</p> <p>ج) مجموعه M دارای چند زیر مجموعه ۵ عضوی شامل ۴ و فاقد ۱۰ می باشد؟</p> <p>د) مجموعه $(A \cap B)' \cup (B \cap A)' \cup (A \cap B)$ را مشخص کنید.</p> <p>ه) مجموعه $B^2 - A^2$ را رسم کنید.</p> <p>و) تعداد اعضای $(A \times B) \cup (B \times A)$ را بدست آورید.</p>
۱/۵	<p>۱۱- در صورت درست بودن ثابت کنید و در غیر این صورت با ارائه مثال نقض رد کنید.</p> <p>الف) $p(A \cup B) = p(A) \cup p(B)$</p> <p>ب) $(A, B, C, D \neq \emptyset) \quad B \subseteq D, A \subseteq C \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$</p>
۱/۵	<p>۱۲- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید:</p> <p>الف) $(A - B) \cup (A \cup B)' = B'$</p> <p>ب) $A \cap (A \cup B) = A$</p>
۰/۷۵	<p>۱۳- حاصلضرب دکارتی در مجموعه $A = [-3, 2]$ و $B = \{5\}$ را مشخص کنید.</p>
۰/۷۵	<p>۱۴- اگر R روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 6\}$ تعریف شده باشد. اعضای آن را مشخص کنید.</p> <p>$x R y \Leftrightarrow x y$</p>
۰/۷۵	<p>۱۵- نمودار مختصاتی رابطه زیر را رسم کنید:</p> <p>$R = \{(x, y) x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$</p>
۰/۷۵	<p>۱۶- رابطه $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y \geq x^2 - 2x, y \leq 3\}$ بیشترین مقدار $x + y$ را بدست آورید؟</p>

الف) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$10^2 + 11^2 + \dots + 20^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 20^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 9^2)$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6} - \frac{9(10)(19)}{6} = 2585$$

ب) φ ج) $14+1=15$ د) λ

ه) $2^{2^0} = 2$ و) $(-\frac{1}{\varphi}, 1)$

ز) $n((A-B) \times (B-A)) = \underbrace{|A-B|}_{\varphi} \times |B-A| = \varphi \Rightarrow n(B-A) = \varphi \Rightarrow n(B) - n(A \cap B) = \varphi$
 $\Rightarrow n(B) = \varphi$

۴) $n=1: 1 > 1 \times$ $n=2: 1+\sqrt{2} > 2 \checkmark$ میا

$n=k: P(k): 1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{k} > k$

$n=k+1: P(k+1): 1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} > k+1$

طرفین فرض \rightarrow $1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} > k+\sqrt{k+1} \Leftrightarrow k+\sqrt{k+1} > k+1$
 $\Leftrightarrow k+1 > 1 \Leftrightarrow k > 0$ $k \in \mathbb{N}$ $C > B$

۳) $a = 2q \Rightarrow a^2 = 4q^2 + 1$

$$\Rightarrow (a^2+3)(3a^2+5) = (4q^2+1+3)(3(4q^2+1)+5) = (4q^2+4)(12q^2+8)$$

$$= 4 \times 4 (\varphi q^2+1)(3\varphi q^2+1) = 4 \times 4 \varphi^2 \Rightarrow 32 = 4 \varphi^2 \Rightarrow \varphi = 2 \Rightarrow k = 5$$

۲) $a \neq 3k \Rightarrow \begin{cases} a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k'' + 1 \\ a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k'' + 1 \end{cases}$

۵) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$
 $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$ روابط بین تیرباران بدیهی

۴) فرض خلف: $A \neq B \Rightarrow x \in A, x \notin B$ و $y \in C \Rightarrow (x, y) \in A \times C$ و $(x, y) \notin B \times C$
 پس فرض خلف: $A \neq B$ و $A \times C = B \times C$ \Rightarrow فرض خلف: $A = B$ و $A \times C = B \times C$

۷) $\{1, 18\} \quad \{2, 17\} \quad \dots \quad \{9, 10\}$

$10 > 9$ $10 \frac{9}{9} = 11$ $1+1=2$
 ۹ دسته توی ۱۰ عدد اتا می

طبق اصل لانه کبوتر که حداقل ۲ عضو از این دسته انتخاب می‌شوند که مجموع آن‌ها برابر ۱۹ است.

۸. زیرا بر مبنای تجزیه است $P \neq 4K \pm 1 \Rightarrow P = 4K$

$\begin{cases} \text{L} & P = 4K + 2 = 2(2K+1) // 2 // * \\ \text{L} & P = 4K + 3 = 4(2K+1) // 4 // * \\ \text{L} & P = 4K + 5 = 2(2K+2) // 2 // * \end{cases}$

اعداد صحیح 4 و 2 صورت $4K$ است $4K + 5$ پس $4K + 5 = 4K + 4 - 4 + 5 = 4K + 4 - 1 = 4(K+1) - 1 = 4K' - 1$

۹. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 7 = 0\}$

۱۰. $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ رقت: $\begin{cases} A \subset M \\ B \subset M \end{cases}$

الف) $A = \{14\}$ $B = \{2, 4, 8, 14\}$

ب) $|P(P(A))| = 2^{2^{|A|}} = 2^{2^1} = 4 \Rightarrow 2^{14}$ زیر مجربه دارد.

ج) $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \Rightarrow \binom{7}{2} = 15$

د) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} = M$

ه) $B^2 - A^2 = \{(2,2), \dots, (8,8)\}$ (نقاط رسم شود)

و) $|(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2 = 2 \times 4 \times 4 - 1 = 7$

۱۱. الف) $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $P(A) = \{\{1\}, \emptyset\}$, $P(B) = \{\{2\}, \emptyset\}$

$A \cup B = \{1, 2\} \Rightarrow P(A \cup B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\} \neq P(A) \cup P(B)$

ب) رقت: $\forall (x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A, y \in B \xrightarrow[\substack{A \subset C \\ B \subset D}]{\Rightarrow} x \in C, y \in D$

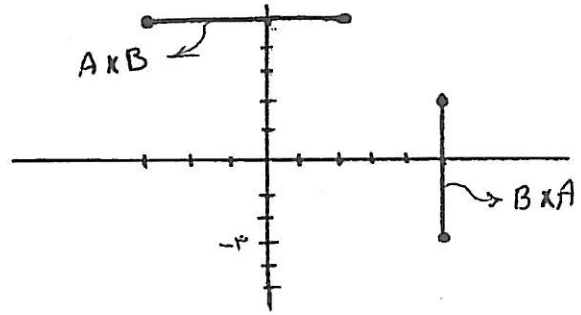
$\Rightarrow (x, y) \in C \times D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

۱۲. الف) $(A - B) \cup (A \cup B)' = (A \cap B') \cup (A' \cap B') = B' \cap (A \cup A') = B'$

ب) $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B) = A$

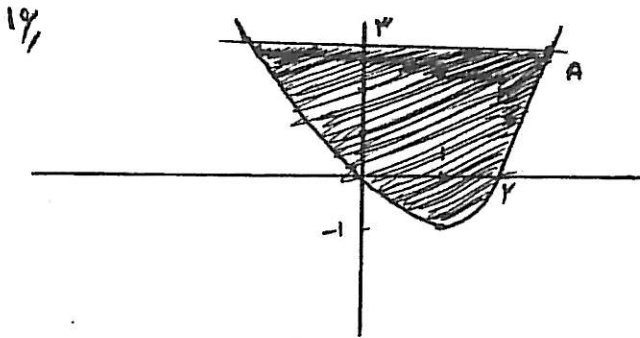
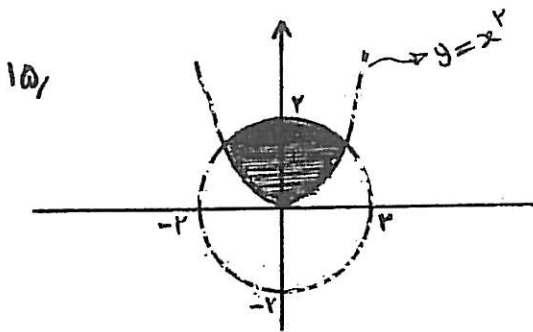
۱۳/ $A \times B = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 2, y = 0\}$

$B \times A = \{(x, y) \mid x = 0, -3 \leq y \leq 2\}$



۱۴/ $A^2 = \{(1,1), \dots, (4,4)\}$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$



$(x+y)_{\max} = x_A + y_A = 3 + 3 = 6$